Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

«Физико-математический лицей», г. Сергиев Посад

Областной конкурс научно - исследовательской и проектной деятельности обучающихся «Юный исследователь»

Секция: Математика

Тема: **«Примеры треугольников Шарыгина»**

Автор работы: Тихонова Мария Валерьевна, 17 лет

Научный руководитель: Забавин Валерий Николаевич

Черноголовка

2017

Оглавление

Введение

Известно, что если основания медиан (высот) данного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника, то и данный треугольник - равнобедренный. И. Ф. Шарыгин в своей книге «Задачи по геометрии» [1] доказал , что существуют неравнобедренные треугольники, для которых треугольник с вершинами в основаниях биссектрис (биссектральный треугольник) равнобедренный. В своей статье в журнале «Квант» [2] автор сообщил, что «не сумел построить конкретный пример треугольника (т.е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством», и выразил надежду, что это удастся читателям.

Цель работы - построить пример треугольников Шарыгина с замечательными углами и с рациональными сторонами.

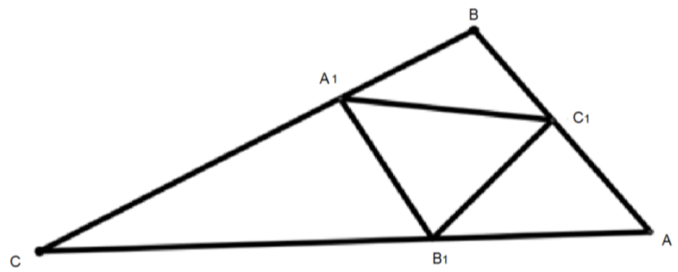
1.Доказательство существования треугольников Шарыгина

В книге [1] поставлена задача:

Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

Решение.

Пусть ABC - данный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1-биссектрисы. Если $A_1B_1 = A_1C_1$ то или $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B$ (тогда треугольник ABC - равнобедренный), или $\angle A_1B_1C$ +$\angle$ A_1C_1B =180°. Во втором случае повернем треугольник $A_1B_1C_1$ вокруг точки A_1на угол $\angle B_1A_1C_1$. В результате треугольникиA_1C_1B и A_1B_1C окажутся приложенными друг к другу и образуют треугольник, подобный треугольнику ABC.



Если длины сторон треугольника ABC равны a,b,c, то стороны получившегося треугольника равны $\frac{ac}{b+c}, \frac{ab}{b+c}, \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c}$. Из подобия следует $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = \frac{a}{a+c}$, откуда

$(b^2 + c^2 - a^2)(a + b + c) + abc = 0$. Заменив выражение в первых скобках по формуле косинусов ($b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$),получим $2(a + b + c)\cos\alpha + a = 0 \Rightarrow$

$a = -\frac{2(b+c)cos\alpha}{1+2cos\alpha}$. Так как $0 < a < b + c$, то $-\frac{1}{4} < \cos\alpha < 0$. Подставив это значение a в формулу косинусов и обозначив cosα=t, $S = \frac{b}{c}$, найдём уравнение для S:

$$(4t + 1)S^2 - 2S(4t^3 + 8t^2 + t) + 4t + 1 = 0.$$

Его решение:

$$S = \frac{4t^3+8t^2+t+(2t+1)\sqrt{(t+1)(2t-1)(2t^2+5t+1)}}{4t+1}.$$

Это решение имеет геометрический смысл, если

$$4t^3 + 8t^2 + t > 0, \quad (t+1)(2t-1)(2t^2+5t+1) > 0.$$

С учетом неравенства $-\frac{1}{4} < t < 0$ получим: $-\frac{1}{4} < t < \frac{\sqrt{17}-5}{4}$

Таким образом, треугольник АВС не обязательно равнобедренный.

2. Пример треугольника с замечательными углами

В книге [3] получено условие равнобедренности биссектрального треугольника:

$$\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\gamma) = \sin 2\gamma - sin2\beta$$

(α,β,γ-углы треугольника АВС).При $\gamma = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}, \alpha = \frac{4\pi}{7}$ это условие выполняется, т.е. в неравнобедренном треугольнике с перечисленными углами биссектральный треугольник равнобедренный. Кроме того, величины этих углов образуют геометрическую прогрессию.

3.Пример треугольника с иррациональными сторонами

Нетрудно получить треугольник Шарыгина, стороны которого будут выражены через квадратичную иррациональность. Возьмем cos α = -2/9. Получим :

$$\frac{b}{c} = \frac{94+5\sqrt{91}}{81}$$

4. Пример треугольника с рациональными сторонами

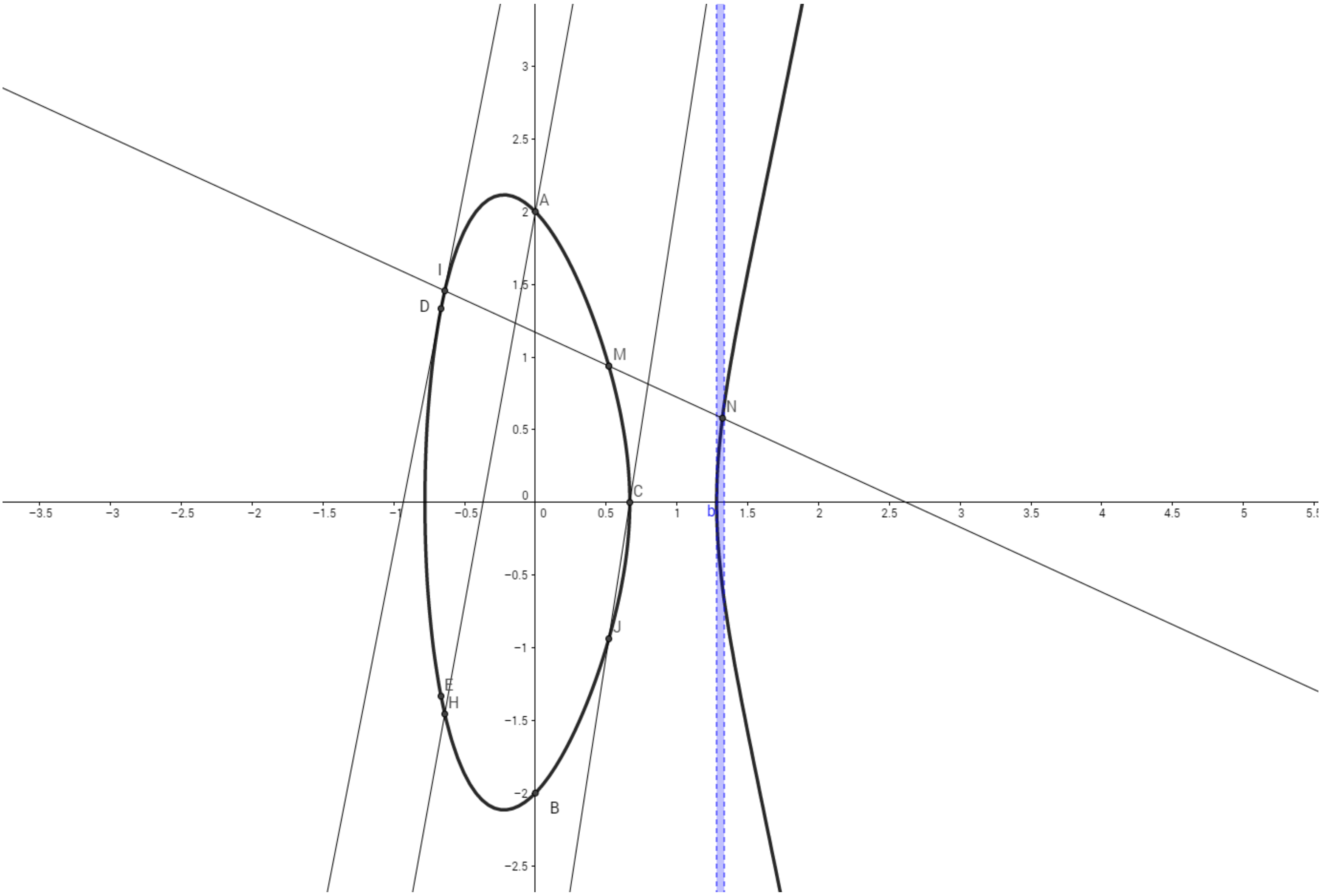
Для построения примера треугольника с рациональными сторонами надо, как следует из п.1, решить в рациональных числах систему

$$\begin{cases} R^2 = (t+1)(2t-1)(2t^2+5t+1) \\ 4t^3 + 8t^2 + 1 > 0 \\ t > -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Уравнение системы приводится к виду, рассматриваемому в[4], с помощью замены $R = \frac{y}{x^2}$, $t = \frac{1}{x} - 1$; неравенства системы вместе с условием положительности правой части уравнения задают интервал, в котором надо искать рациональные решения уравнения:

$$\begin{cases} y^2 = 6x^3 - 7x^2 - 4x + 4 \\ \frac{\sqrt{17}+1}{4} < x < \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Кривая, задаваемая уравнением, и неравенство показаны на рисунке.


A
I
D
M
N
C
b
J
E
H
B

Рациональные решения уравнения находятся следующим образом.

Прямая, проходящая через две рациональные точки (x_i, y_i) и (x_j, y_j) кривой, определяемой уравнением, пересекает эту кривую третий раз тоже в рациональной точке:

$$x_k = \frac{1}{(6x_i x_j)}\left(\frac{(x_i y_j - x_j y_i)^2}{(x_i - x_j)^2} - 4\right), \qquad y_k = y_i + \left(\frac{(y_i - y_j)}{x_i - x_j}\right)(x_k - x_i) \ .$$

Касательная к кривой в рациональной точке (x_i, y_i) пересекает кривую в другой рациональной точке с координатами

$$x_j = \frac{1}{6x^2}\left(\left(\frac{x_i}{y_i}(9x_i^{\,3} - 7x_i - 2) - y_i\right)^2 - 4\right) \ , \ y_j = y_i + \left(\frac{9x^2{}_i - 7x_i - 2}{y_j}\right)(x_j - x_i)$$

Нам известны (угаданы) решения: $x = 0, \mathrm{y} = \pm 2$; $x = -\frac{2}{3}, y = \pm\frac{4}{3}$; $x = \frac{2}{3}, y = 0.$

Проведя касательную в точке D$(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, получим решения $R\left(\frac{20}{3}, 38\right)$; $Q(\frac{20}{3}, -38)$;

точки $C(\frac{2}{3}, 0)$ и $R\left(\frac{20}{3}, 38\right)$ дают решения $J\left(\frac{14}{27}, -\frac{76}{81}\right)$; $M(\frac{14}{27}, \frac{76}{81})$; точки $A(0,2)$ и $R(\frac{20}{3}, 38)$ дают решения $H\left(-\frac{16}{25}, -\frac{182}{125}\right)$; $I(-\frac{16}{25}, \frac{182}{125})$. Наконец, точки $M\left(\frac{14}{27}, \frac{76}{81}\right)$ и $I\left(-\frac{16}{25}, \frac{182}{125}\right)$ дают решение в нужном нам интервале: $x = \frac{166*1217}{391^2}, y = \frac{32*1082437}{391^3}$. Отсюда находим

$$cos\alpha = -\frac{49141}{202022} \ , \ \frac{b}{c} = \frac{128*1082437*101011^2}{391^2*49141^2} \ ,$$

$$\frac{a}{c} = \frac{128 * 1082437 * 101011^2 + 391^2 * 49141^2}{391^2 * 49141 * 51370}$$

Вывод.

Построены примеры неравнобедренных треугольников, для которых биссектральный треугольник равнобедренный:
1) треугольник с углами: π/7,2π/7,4π/7 ;
2) треугольник с рациональными сторонами.

Список использованной литературы:

1. И.Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии. Планиметрия. Библиотечка “Квант”. Вып.17.- М.:Наука, 1982 . С.154.

2. И.Ф. Шарыгин. Вокруг биссектрисы // Квант.-1983.-№8. С.32-36.

3. И.А. Кушнир. Геометрия. Поиск и вдохновение. - М.:МЦНМО, 2013. С.170.

4. В.В. Острик, М.А. Цфасман. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые. Библиотека “Математическое просвещение”. Вып.8.- М.:МЦНМО, 2005. С.21.